Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
63 tomas, 2022, 54–61
https://doi.org/10.15388/LMR.2022.29758

Trikampio egzistavimas, kai žinomi trys jo elementai

Edmundas Mazėtis[a], **Grigorijus Melničenko**[b]

[a] *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
[b] *Matematikos ir informatikos fakultetas, Vytauto Didžiojo universitetas*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas, Lietuva
El. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2022 liepos 2; publikuotas 2022 gruodžio 10

Santrauka. Trikampio egzistavimas, kai duoti trys jo elementai, kai kuriais atvejais yra sunkus uždavinys. Pavyzdžiui, Brokard'o uždavinys apie trikampio egzistavimą [1], kai duotos trys jo pusiaukampinės, turi ilgą istoriją [3] ir išspręstas tik 1994 metais [10]. Šiame darbe nagrinėjami atvejai, kai trikampį nusakantys elementai yra kraštinės, kampai, aukštinės, pusiaukraštinės, pusiaukampinės, apibrėžto apie trikampį ir įbrėžto į trikampį apskritimų spinduliai, perimetras. Iš viso egzistuoja 186 skirtingi trikampio egzistavimo, žinant tris jo elementus, uždaviniai, iš kurių 116 atvejų yra gautos pakankamos egzistavimo sąlygos (kai kuriems pakankamos ir būtinos egzistavimo sąlygos), o trikampis nubraižomas skriestuvu ir liniuote. Likusių 70 uždavinių bendruoju atveju negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote. Autoriai išvardija tuos 70 uždavinių ir nurodo, kuriems jų yra gautos būtinos ir pakankamos egzistavimo sąlygos.

Raktiniai žodžiai: trikampis; trikampių sprendimas; leksikografinė tvarka; aukštinė; pusiaukraštinė; pusiaukampinė; įbrėžto ir apibrėžto apskritimų spinduliai; perimetras
AMS: 97G40

1 Įvadas

Trikampis – paprastoji uždaroji laužtė, sudaryta iš trijų atkarpų (trikampio kraštinių), jungiančių tris taškus (trikampio viršūnes), nesančius vienoje tiesėje. Bet trikampis nėra toks paprastas geometrinis objektas, nes kai kurie trikampio egzistavimo uždaviniai buvo sprendžiami šimtmečiais. Pavyzdžiui, Brokard'o uždavinys – trikampio egzistavimas, žinant tris jo vidaus kampų pusiaukampines [1], turi ilgą istoriją, aprašytą [3] darbe. Daug trikampio egzistavimo, kai žinomi trys jo elementai, uždavinių yra neišspręsti iki šiol (žr. 2 lentelę).

Terminas „trikampio sprendimas“ šiame darbe suprantamas kaip geometrinio uždavinio – rasti trikampio elementus, kai duoti trys jo elementai – sprendimas [15]. Darbe naudojami įprasti trikampio elementų žymėjimai: trikampio viršūnes ir atitinkamų kampų didumai žymimi didžiosiomis raidėmis, prieš trikampio viršūnę esančios kraštinės ilgis žymimas tokia pačia, tik mažąja raide.

Nagrinėsime 6 pagrindinius trikampio elementus: tris metrinius elementus – kraštinių ilgius a, b, c ir 3 kampų didumus A, B, C. Klasikiniuose trikampio sprendimo uždaviniuose duoti trys iš minėtų elementų, o reikia rasti likusius tris. Sprendžiant klasikinius uždavinius, reikia rasti būtinas ir pakankamas trikampio su duotaisiais elementais egzistavimo sąlygas. Pavyzdžiui, jei duoti trikampio kraštinių ilgiai a, b, c, tai, kaip žinoma, trikampio egzistavimo būtina sąlyga nusakoma trikampio nelygybe $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Jei teisingos šios sąlygos, trikampis nubraižomas skriestuvu ir liniuote, taigi šios sąlygos yra ir pakankamos. Tuomet visi kiti svarbiausieji trikampio elementai: 3 aukštinės h_a, h_b, h_c, 3 pusiaukraštinės m_a, m_b, m_c, 3 pusiaukampinės l_a, l_b, l_c, apibrėžto apie trikampį apskritimo ir įbrėžto į jį apskritimo spinduliai R, r, perimetras $2p$ randami pagal formules, kurios trikampio kraštinių a, b, c atžvilgiu yra arba racionalieji reiškiniai, arba reiškiniai su kvadratiniais radikalais. Šios formulės yra gerai žinomos, jas galima rasti mokykliniuose vadovėliuose arba kitoje moksleiviams skirtoje matematinėje literatūroje.

Šiame darbe nagrinėjami tokie trikampio elementai:

1. 3 kraštinės a, b, c;
2. 3 kampai A, B, C;
3. 3 aukštinės h_a, h_b, h_c;
4. 3 pusiaukraštinės m_a, m_b, m_c;
5. 3 pusiaukampinės l_a, l_b, l_c;
6. Apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spinduliai R, r;
7. Perimetras $2p$.

Kai kurie autoriai, pvz., [6] darbe dar papildomai nagrinėja pribrėžtinių apskritimų spindulius r_a, r_b, r_c, o taip pat trikampio plotą (pvz., [4, 5] darbuose).

2 Trikampio elementų leksikografinė seka

Tam tikros sutvarkytos abėcėlės žodžių aibės tiesinės tvarkos sąryšį vadinsime leksikografine tvarka. Šio termino prasmė kildinama iš žodžių rikiavimo žodyne abėcėlės tvarka. Sakykime, kad trikampio elementai [4, 5, 6]:

$$a, b, c, A, B, C, h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, l_a, l_b, l_c, R, r, 2p, \tag{1}$$

yra tam tikros sąlyginės abėcėlės raidės, kurios sutvarkytos nurodyta leksikografine tvarka. Tuomet kraštinė a yra pirmoji abėcėlės raidė, kraštinė b – antroji raidė ir t. t., perimetras $2p$ – paskutinė abėcėlės raidė. Sudarykime žodžius iš trijų šios abėcėlės raidžių (trijų trikampio elementų) ir kelkime klausimą, kokioms sąlygoms galiojant egzistuoja trikampis, apibrėžiamas tais elementais. Tokia leksikografinė tvarka, pasiūlyta [4, 5] darbuose, nustato tam tikrą trikampio elementų hierarchiją, ir leidžia sutvarkyti visus trikampio elementų trejetus. Pavyzdžiui, pirmiausiai užrašomi trejetai, kuriuose yra bent viena kraštinė ir t. t.

Aštuoniolika (1) leksikografinės sekos narių leidžia suformuluoti $C_{18}^3 = 816$ trikampio egzistavimo pagal tris duotuosius elementus variantų.

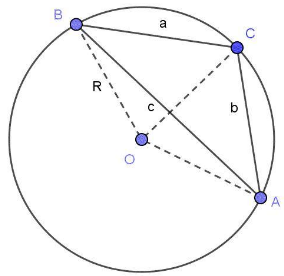
Konkretus trikampio egzistavimo, žinant jo tris elementus iš (1) leksikografinės sekos, uždavinys gali turėti arba vienintelį variantą, arba tris variantus, arba šešis variantus. Pavyzdžiui, uždaviniai abc (trikampio apibrėžimas, pagal tris kraštines), ABC (pagal tris kampais), $h_a h_b h_c$ (pagal tris aukštines), $m_a m_b m_c$ (pagal tris pusiaukraštines), $l_a l_b l_c$ (pagal tris pusiaukampines) yra formuluojami vienareikšmiškai. Trikampio egzistavimas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų turi tris ekvivalenčias formuluotes

$$(abC) \Leftrightarrow (bcA) \Leftrightarrow (caB),$$

o trikampio egzistavimas pagal dvi kraštines ir prieš vieną jų esantį kampą – šešias lygiavertes formuluotes

$$(abA) \Leftrightarrow (abB) \Leftrightarrow (bcB) \Leftrightarrow (bcC) \Leftrightarrow (caC) \Leftrightarrow (caA).$$

Taigi nagrinėjame (1) leksikografinę seką, kurią vadiname abėcėle, ši seka nustato 186 skirtingų trikampio egzistavimo pagal tris jo elementus uždavinių išdėstymo tvarką. Šiuos uždavinius surašėme į dvi lenteles. Pirmojoje lentelėje pateikti trikampiai, nubraižomi skriestuvu ir liniuote, o antrojoje – tie uždaviniai, kurie neišsprendžiami skriestuvu ir liniuote. Toliau nagrinėdami kurį nors uždavinį, rašysime jo numerį, po brūkšnelio nurodant lentelės numerį. Pavyzdžiui, Brokard'o uždavinys žymimas 64-2.



1 pav: 4-2 (aAR).

Pažymėtina, kad ne visi trikampių sprendimo uždaviniai turi vienintelį sprendinį. Uždavinius, turinčius ne vieną skirtingą sprendinį, vadinsime neapibrėžtais uždaviniais (**Indeterminate**). Pavyzdžiui, trikampio egzistavimas pagal tris kampus yra neapibrėžtas uždavinys – 20-2 (ABC), nes, jei duotųjų kampų suma lygi 180°, tai bet kuris trikampis, panašus duotajam, taip pat yra uždavinio sprendinys. Kitas neapibrėžto uždavinio pavyzdys yra uždavinys 4-2 (aAR). Tikrai, judant taškui A apskritimu (1 pav.) nuo taško B iki taško C, gauname be galo daug skirtingų sprendinių.

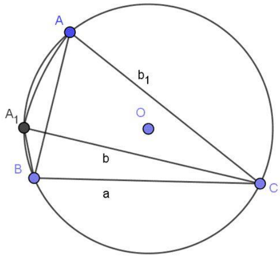
3 Nubraižomų skriestuvu ir liniuote trikampių egzistavimas

Mokykliniame geometrijos kurse svarbią vietą užima trikampių braižymo skriestuvu ir liniuote uždaviniai. 1 lentelėje išvardyta 116 uždavinių, kurie yra išsprendžiami skriestuvu ir liniuote ir jiems nustatytos pakankamos egzistavimo sąlygos [4, 5, 6].

Šioje lentelėje ženklu **Su** (**Sufficient**) pažymėti tie uždaviniai, kuriems nustatytos pakankamos egzistavimo sąlygos, o tie uždaviniai, kuriems yra rastos būtinos ir pakankamos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos, pažymėti **SuNe** (**Sufficient and Necessary**).

1 lentelė.

1.	abc	**SuNe**	30.	ah_ah_b	**SuNe**	59.	ABh_a	**SuNe**	88.	Am_a2p	**Su**
2.	abA	**Su**	31.	ah_am_a	**SuNe**	60.	ABh_c	**SuNe**	89.	Am_bm_c	**Su**
3.	abC	**SuNe**	32.	ah_am_b	**SuNe**	61.	ABm_a	**SuNe**	90.	Am_bR	**Su**
4.	abh_a	**Su**	33.	ah_al_a	**Su**	62.	ABm_c	**SuNe**	91.	Al_aR	**Su**
5.	abh_c	**Su**	34.	ah_aR	**Su**	63.	ABl_a	**SuNe**	92.	Al_ar	**Su**
6.	abm_a	**SuNe**	35.	ah_ar	**Su**	66.	ABl_c	**SuNe**	93.	Al_a2p	**Su**
7.	abm_c	**SuNe**	36.	ah_a2p	**Su**	65.	ABR	**SuNe**	94.	Al_br	**Su**
8.	abl_c	**Su**	37.	ah_bh_c	**Su**	66.	ABr	**SuNe**	95.	ARr	**Su**
9.	abR	**Su**	38.	ah_bm_a	**Su**	67.	$AB2p$	**SuNe**	96.	$AR2p$	**Su**
10.	$ab2p$	**SuNe**	39.	ah_bm_b	**Su**	68.	Ah_ah_b	**Su**	97.	$Ar2p$	**Su**
11.	aAB	**SuNe**	40.	ah_bm_c	**Su**	69.	Ah_am_a	**Su**	98.	$h_ah_bh_c$	**SuNe**
12.	aAh_a	**Su**	41.	ah_bl_b	**Su**	70.	Ah_am_b	**Su**	99.	$h_ah_bm_a$	**Su**
13.	aAh_b	**Su**	42.	ah_bl_c	**Su**	71.	Ah_al_a	**Su**	100.	$h_ah_bm_c$	**Su**
14.	aAm_a	**Su**	43.	ah_bR	**Su**	72.	Ah_aR	**Su**	101.	$h_ah_bl_c$	**Su**
15.	aAm_b	**Su**	44.	ah_br	**Su**	73.	Ah_ar	**Su**	102.	h_ah_br	**Su**
16.	aAl_a	**Su**	45.	ah_b2p	**Su**	74.	Ah_a2p	**Su**	103.	$h_am_am_b$	**Su**
17.	aAr	**Su**	46.	am_am_b	**Su**	75.	Ah_bhc	**Su**	104.	$h_am_al_a$	**Su**
18.	$aA2p$	**Su**	47.	am_al_a	**Su**	76.	Ah_bm_a	**Su**	105.	h_am_aR	**Su**
19.	aBC	**SuNe**	48.	am_aR	**Su**	77.	Ah_bm_b	**Su**	106.	h_am_ar	**Su**
20.	aBh_a	**SuNe**	49.	am_a2p	**Su**	78.	Ah_bm_c	**Su**	107.	$h_am_bm_c$	**SuNe**
21.	aBh_b	**Su**	50.	am_bm_c	**Su**	79.	Ah_bl_a	**Su**	108.	h_al_aR	**Su**
22.	aBm_a	**Su**	51.	am_bR	**Su**	80.	Ah_bl_b	**Su**	109.	h_al_ar	**Su**
23.	aBm_b	**Su**	52.	am_b2p	**Su**	81	Ah_bR	**Su**	110.	h_al_a2p	**Su**
24.	aBm_c	**Su**	53.	al_aR	**Su**	82.	Ah_br	**Su**	111.	h_aRr	**SuNe**
25.	aBl_b	**Su**	54.	al_a2p	**Su**	83.	Ah_b2p	**Su**	112.	h_aR2p	**Su**
26.	aBl_c	**Su**	55.	al_b2p	**Su**	88.	Am_am_b	**Su**	113.	h_ar2p	**Su**
27.	aBR	**Su**	56.	aRr	**Su**	85.	Am_al_a	**Su**	114.	$m_am_bm_c$	**SuNe**
28.	aBr	**Su**	57.	$aR2p$	**Su**	86.	Am_aR	**Su**	115.	m_al_aR	**Su**
29.	$aB2p$	**Su**	58.	$ar2p$	**Su**	87.	Am_ar	**Su**	116.	l_ar2p	**Su**



2 pav: 9-1 abR.

Lentelėse ne visi uždaviniai yra apibrėžiami vienareikšmiškai. Pavyzdžiui, uždavinys 9-1 abR (trikampį nustato dvi kraštinės ir apibrėžto apskritimo spindulys) gali neturėti sprendinių, gali turėti vieną sprendinį arba du skirtingus sprendinius. 2 pav. parodytas atvejis, kai yra du skirtingi sprendiniai – trikampiai ABC ir A_1BC, čia $b_1 = b$.

Uždavinio 56-1 (aRr) (kai duota trikampio kraštinė, apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spinduliai) sprendinio vienatis priklauso nuo atstumo $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$ tarp apibrėžto ir įbrėžto apskritimų centrų, esant būtinai egzistavimo sąlygai $R > 2r$. Detaliau apie tai galima rasti [13] darbe.

1 lentelėje **SuNe** pažymėti trys gerai žinomi uždaviniai [16]: 1-1 (abc), 98-1 ($h_ah_bh_c$), 114-1 ($m_am_bm_c$). Taip pat sąlyga **SuNe** teisinga ir 111-1 (h_aRr) uždaviniui [13]. Įrodymus, kad 1 lentelėje uždaviniams 3-1, 6-1, 7-1, 10-1, 11-1, 19-1, 20-1, 30-1, 31-1, 32-1, 59-1 – 67-1, 107-1 yra teisingos **SuNe**, paliekame skaitytojui. Kitiems 1 lentelės uždaviniams nežinoma, kada yra teisingos sąlygos **SuNe**.

4 Nenubraižomų skriestuvu ir liniuote trikampių egzistavimas

2 lentelėje išvardyta 70 uždavinių [4, 5, 6], kai žinant tris trikampio elementus, trikampis nėra nubraižomas skriestuvu ir liniuote, taip pat lentelėje nurodyti ir neapibrėžti uždaviniai. Tai, kad apibrėžtų uždavinių atveju trikampiai nenubraižomi skriestuvu ir liniuote, įrodyta [9] darbe, nors [5] darbe rašoma, kad šiems uždaviniams buvo išnagrinėta neišsprendžiamumo skriestuvu ir liniuote problema, bet tai nebuvo paskelbta.

Neapibrėžti uždaviniai, kurie turi arba be galo daug sprendinių, arba nė vieno sprendinio, pažymėti simboliu **In** (**Indeterminate**). Ženklu **Un** (**Unknown**) pažymėti uždaviniai, kuriems kol kas nežinomos net ir pakankamos trikampio egzistavimo sąlygos, arba neaišku, ar uždavinys apibrėžtas. Kaip ir 1 lentelėje simboliu **SuNe** (**Sufficient and Necessary**) pažymėti uždaviniai, kuriems surastos būtinos ir pakankamos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos.

2 lentelėje simboliu **SuNe** pažymėta nedaug uždavinių: 15-2 (al_al_b) [13], 17-2 (al_bl_c) [12], 29-2 (al_bl_c) [2], 64-2 ($l_al_bl_c$) [10, 16], 68-2 (l_aR2p) [14], 70-2 ($Rr2p$) [14]. Kitiems 2 lentelės uždaviniams yra nežinoma, kada yra teisingos sąlygos **SuNe**.

Ko gero, sunkiausias uždavinys iš pažymėtų **SuNe** – tai 64-2 ($l_al_bl_c$) uždavinys. Jį suformulavo prancūzų matematikas Brokard'as 1875 m., o tik 1994 m. buvo gautas jo sprendimas [3, 7, 10, 11] taikant Brauerio teoremą apie nejudantį tašką. Vėliau gautas įrodymas mokyklinės geometrijos metodais [16].

5 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai duoti du jo elementai

Stačiojo trikampio brėžimas skriestuvu ir liniuote, kai žinomi du jo elementai, dažnai sprendžiamas paprasčiau, negu nestačiojo trikampio atveju. Bet kai trikampis nenubraižomas skriestuvu ir liniuote, rasti jo egzistavimo ir vienaties būtinas ir pakankamas sąlygas dažnai būna sunkus uždavinys. Neatsitiktinai geometrijoje dažnai yra skiriami ir atskirai nagrinėjami smailiojo, stačiojo ir bukojo trikampio atvejai.

2 lentelė.

1.	abl_a	**Un**	19.	al_br	**Un**	37.	h_am_a2p	**Un**	55.	m_al_ar	**Un**
2.	abr	**Un**	20.	ABC	**In**	38	$h_am_bl_a$	**Un**	56.	m_al_a2p	**Un**
3.	aAl_b	**Un**	21.	Ah_al_b	**Un**	39.	$h_am_bl_b$	**Un**	57.	$m_al_bl_c$	**Un**
4.	aAR	**In**	22.	Ah_bl_c	**Un**	40.	$h_am_bl_c$	**Un**	58.	m_al_bR	**Un**
5.	aBh_c	**Un**	23.	Am_al_b	**Un**	41.	h_am_bR	**Un**	59.	m_al_br	**Un**
6.	aBl_a	**Un**	24.	Am_bl_a	**Un**	42.	h_am_br	**Un**	60.	m_al_b2p	**Un**
7.	ah_al_b	**Un**	25.	Am_bl_b	**Un**	43.	h_am_b2p	**Un**	61.	m_aRr	**Un**
8.	ah_bl_a	**Un**	26.	Am_bl_c	**Un**	44.	$h_al_al_b$	**Un**	62.	m_aR2p	**Un**
9.	am_al_b	**Un**	27.	Am_br	**Un**	45.	$h_al_bl_c$	**Un**	63.	m_ar2p	**Un**
10.	am_ar	**Un**	28.	Am_b2p	**Un**	46.	h_al_bR	**Un**	64.	$l_al_bl_c$	**SuNe**
11.	am_bl_a	**Un**	29.	Al_al_b	**Un**	47.	h_al_br	**Un**	65.	l_al_bR	**Un**
12.	am_bl_b	**Un**	30.	Al_bl_c	**Un**	48.	h_al_b2p	**Un**	66.	l_al_br	**Un**
13.	am_bl_c	**Un**	31.	Al_bR	**Un**	49.	$m_am_bl_a$	**Un**	67.	l_al_b2p	**Un**
14.	am_br	**Un**	32.	Al_b2p	**Un**	50.	$m_am_bl_c$	**Un**	68.	l_aRr	**SuNe**
15.	al_al_b	**SuNe**	33.	$h_ah_bl_a$	**Un**	51.	m_am_bR	**Un**	69.	l_aR2p	**Un**
16.	al_ar	**Un**	34.	h_ah_bR	**Un**	52.	m_am_br	**Un**	70.	$Rr2p$	**SuNe**
17.	al_bl_c	**SuNe**	35.	h_ah_b2p	**Un**	53.	m_am_b2p	**Un**			
18.	al_bR	**Un**	36.	$h_am_al_b$	**Un**	54.	$m_al_al_b$	**Un**			

Ankstesniame darbe [8] autoriai rado būtinas ir pakankamas egzistavimo ir vienaties sąlygas statiesiems trikampiams šiais atvejais:

- $(C = 90°m_al_a)$ – trikampis egzistuoja tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $l_a > m_a$. Be to, toks statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai ir bendruoju atveju jo negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote;
- $(C = 90°m_cl_a)$ – trikampis egzistuoja tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $2m_c > l_a$. Be to, toks statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai ir bendruoju atveju jo negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote.

6 Uždaviniai tolesniems tyrinėjimams

Autorių nuomone, galimi tokie tolimesni tyrinėjimai, susiję su nagrinėjama tematika.

1. Išsiaiškinti, kuriems iš 1 lentelės 116 uždavinių, išsprendžiamų skriestuvu ir liniuote:

   (a) pakankamos sąlygos yra ir būtinos ir jos garantuoja sprendinio vienatį;

   (b) pakankamos sąlygos yra ir būtinos, bet jos garantuoja dviejų, trijų ir daugiau sprendinių egzistavimą;

(c) pakankamos sąlygos yra ir būtinos, bet dar reikalingas ir papildomų sąlygų įvykdymas, garantuojantis sprendinio vienatį.

2. Surasti sąlygas sprendinio egzistavimui 2 lentelės uždaviniams, kuriems tos sąlygos yra nesurastos.
3. Toliau tyrinėti stačiojo trikampio egzistavimo pagal du elementus uždavinius.
4. Išnagrinėti lygiašonių trikampių egzistavimo klausimus.

Kadangi šie uždaviniai yra dažniausiai sprendžiami elementariosios geometrijos metodais, jie gali būti medžiaga tiek gabių mokinių papildomam darbui, tiek studentų kursiniams ir diplominiams darbams.

Literatūra

[1] H. Brocard. Question 58. *Nouvelle Correspondance Math*, **1**:208, 1875.

[2] J. Bukor. On the existence of triangle with given angle and opposite angle bisectors length. *Ann. Math. Inform.*, **36**:43–46, 2009.

[3] G. Dinca, J. Mawhin. A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Bull. Belg. Math. Soc.*, **17**:333–341, 2010.

[4] V.B. Fursenko. Lexicographic account of triangle construction problems (Part I). *Mathematics in Schools*, **5**:4–30, 1937.

[5] V.B. Fursenko. Lexicographic account of triangle construction problems (Part II). *Mathematics in Schools*, **6**:21–45, 1937.

[6] V.I. Golubev, L.N. Erganzhieva, K.K. Mosevich. *Construction of a Triangle.* Knowledge Lab, Moscow, 2016.

[7] G. Heindl. How to compute a triangle with prescribed lengths of its internal angle bisectors. *Forum Geom.*, **16**:407–414, 2016.

[8] J. Kirjackis, E. Mazėtis, G. Melničenko. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Liet. matem. rink., LMD darbai, ser. B*, **58**:33–38, 2017.

[9] O. Krötenheerdt. Zur theorie der dreieckskonstruktionen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturw. Reihe*, **15**:677–700, 1966.

[10] P. Mironescu, L. Panaitopol. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Amer. Math. Monthly*, **101**:58–60, 1994.

[11] S.F. Osinkin. On the existence of a triangle with prescribed bisector lengths. *Forum Geom.*, **16**:399–405, 2016.

[12] V. Oxman. On the existence of triangles with given lengths of one side and two adjacent angle bisectors. *Forum Geom.*, **4**:215–218, 2004.

[13] V. Oxman. On the existence of triangles with given circumcircle, incircle, and one additional element. *Forum Geom.*, **5**:165–171, 2005.

[14] V. Oxman. On the existence of triangles with given lengths of one side, the opposite and one adjacent angle bisectors. *Forum Geom.*, **5**:21–22, 2005.

[15] M. Vygodsky. *Mathematical Handbook Elementary Mathematics.* Mir Publishers, Moscow, 1979.

[16] A. Zhukov, I. Akulich. Is the triangle defined uniquely? *Kvant*, **1**:29–31, 2003.

SUMMARY

The existence of a triangle when its three elements are known

E. Mazėtis, G. Melničenko

The problem of the existence of a triangle with respect to three given elements in some cases can be very difficult. For example, Brokard's problem about the existence of a triangle, given its three bisectors [1], has a long history [3] and solved only in 1994 [10]. We include in the number of elements: three sides, three angles, three heights, three medians, three bisectors, radii of the circumscribed and inscribed circles, and perimeter. In total, there are 186 different problems of the existence of a triangle with three given elements and for 116 problems are given sufficient conditions (for some sufficient and necessary conditions of existence) when a triangle can be construct by a compass and a ruler, and the remaining 70 problems when it is impossible to construct a triangle by a compass and a ruler. The authors list these 70 problems and indicate for which of them the necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the existence of a triangle with three prescribed elements have found.

Keywords: triangle; solution of triangles; lexicographic order; height; median; bisector; radii of the circumscribed and inscribed circles; perimeter